Devoir sur Table 3

Durée : 4h

- Les exercices sont indépendants. Ils peuvent être traités dans un ordre quelconque.
- Tous les documents sur papier sont interdits.
- Les calculatrices ne sont pas autorisées.
- Le matériel de géométrie (règle, compas, équerre) est autorisé.
- La notation des copies tiendra compte dans une large mesure de la qualité de la rédaction. Ceci implique que vous devez faire des raisonnements clairs, concis et complets, utiliser un langage mathématiques adapté et précis, être lisible et éviter les fautes d'orthographe et de grammaire.
- Si, au cours du devoir, vous repérez ce qui vous semble être une erreur d'énoncé, vous le signalez sur votre copie et poursuivez sa composition en expliquant les raisons des initiatives que vous avez été amené à prendre.
- Mettez en évidence vos résultats en les encadrant.
- Conformément au règlement de la Banque PT
  - Composer lisiblement sur les copies avec un stylo à bille à encre foncée : bleue ou noire.
  - L'usage de liquide de correction et dérouleur de ruban correcteur est interdit.

Le soin apporté à la copie fera l'objet d'une évaluation suivant les critères suivants :
- Mise en évidence des résultats
- Soin et lisibilité de la copie. En particulier les traits, y compris pour les ratures, devront être tracés à l'aide d'une règle
- Respect des consignes concernant le liquide de correction et le dérouleur de ruban correcteur
- Respect de la grammaire et de l'orthographe

Problème 1 Développement asymptotique de la série harmonique

(adapté de HEC BL 2010)

Dans tout le problème on considère les suites $(H_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définies par

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}, \qquad u_n = H_n - \ln(n)$$

Partie I

1. Établir, pour tout entier naturel k non-nul l'encadrement suivant
$$\frac{1}{k+1} \leqslant \ln(k+1) - \ln(k) \leqslant \frac{1}{k}$$

2. (a) Quelle est la limite de la suite $(H_n)_{n\in\mathbb{N}}$?
   (b) En utilisant le résultat de la question 1., montrer pour tout entier naturel n non nul, l'encadrement suivant :
$$\ln(n) + \frac{1}{n} \leqslant H_n \leqslant \ln(n) + 1$$
   (c) En déduire un équivalent simple de H_n quand n tend vers $+\infty$.

3. (a) En utilisant à nouveau l'encadrement obtenu à la question 1., montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante.
   (b) En déduire que cette suite est convergente ; on note γ sa limite. Montrer que γ appartient à $[0, 1]$.

4. Soit f une fonction définie et deux fois dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ dont les dérivées première et seconde sont notées respectivement f' et f''. On suppose que f'' est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.

   On pose, pour tout entier naturel k non-nul

$$J_k = \frac{1}{2}\int_k^{k+1}\left(t-k-\frac{1}{2}\right)^2 f''(t)\,\mathrm{d}t$$

   (a) Établir pour tout entier naturel k non-nul l'égalité suivante

$$J_k = \frac{f'(k+1)-f'(k)}{8} - \frac{f(k+1)+f(k)}{2} + \int_k^{k+1} f(t)\,\mathrm{d}t$$

   (b) En déduire, pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, la relation suivante

$$\sum_{k=1}^{n} f(k) = \frac{f(1)+f(n)}{2} + \frac{f'(n)-f'(1)}{8} + \int_1^n f(t)\,\mathrm{d}t - \sum_{k=1}^{n-1} J_k$$

5. On suppose dans cette question que la fonction f est définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $f(x) = \dfrac{1}{x}$

   (a) Établir, pour tout entier naturel k non-nul la double inégalité suivante

$$0 \leqslant J_k \leqslant \int_k^{k+1}\frac{1}{4t^3}\,\mathrm{d}t$$

   (b) En déduire que la série de terme général $(J_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ est convergente.

   (c) En déduire également, pour tout entier naturel n non-nul l'encadrement suivant

$$0 \leqslant \sum_{k=n}^{+\infty} J_k \leqslant \frac{1}{8n^2}$$

   (d) Prouver l'existence d'une suite convergente $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de limite nulle telle que l'on ait, pour tout entier naturel n non-nul

$$H_n = \ln(n) + \gamma + \frac{1}{2n} + \frac{\varepsilon_n}{n}$$

Partie II

6. Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites de réels strictement positifs vérifiant les deux conditions suivantes

   (i) La série de terme général $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente

   (ii) $a_n \underset{+\infty}{\sim} b_n$

   (a) Soit ε un réel strictement positif, justifier l'existence d'un entier naturel n_0 tel que

$$\forall n \geqslant n_0, \qquad |a_n - b_n| \leqslant \varepsilon b_n$$

   (b) En déduire, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à n_0, l'inégalité suivante

$$\left|\sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k - \sum_{k=n+1}^{+\infty} b_k\right| \leqslant \varepsilon \sum_{k=n+1}^{+\infty} b_k$$

   (c) Établir l'équivalence suivante

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k \underset{+\infty}{\sim} \sum_{k=n+1}^{+\infty} b_k$$

7. Soit $\alpha > 1$

(a) Montrer que, pour tout entier k supérieur ou égal à 2, on a

$$\int_k^{k+1} \frac{1}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t \leqslant \frac{1}{k^\alpha} \leqslant \int_{k-1}^{k} \frac{1}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t$$

(b) En déduire, pour tout entier naturel n non nul et tout entier N strictement supérieur à n, la double inégalité

$$\int_{n+1}^{N+1} \frac{1}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t \leqslant \sum_{k=n+1}^{N} \frac{1}{k^\alpha} \leqslant \int_{n}^{N} \frac{1}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t$$

(c) Établir l'équivalence suivante

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha} \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{\alpha-1} \times \frac{1}{n^{\alpha-1}}$$

Partie III

On considère les suites $(x_n)_{n\geqslant 1}$ et $(y_n)_{n\geqslant 2}$ définies par

$$\forall n \geqslant 1, \quad x_n = u_n - \frac{1}{2n}, \qquad \text{et} \qquad \forall n \geqslant 2, \quad y_n = x_n - x_{n-1}$$

8. (a) Quelle est la limite de la suite $(x_n)_{n\geqslant 1}$?

   (b) Justifier, pour tout entier naturel n non-nul l'égalité suivante

$$\gamma - x_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} y_k$$

   (c) En déduire pour tout entier naturel n non-nul l'égalité suivante

$$\gamma - x_n = \frac{1}{2} \sum_{k=n+1}^{+\infty} \left(\frac{1}{k} + \frac{1}{k-1} + 2\ln\left(1 - \frac{1}{k}\right)\right)$$

9. (a) Montrer qu'il existe une suite $(\varepsilon'_k)_{k\geqslant 1}$ convergente de limite nulle vérifiant

$$\frac{1}{k-1} = \frac{1}{k} + \frac{1}{k^2} + \frac{1}{k^3} + \frac{\varepsilon'_k}{k^3}$$

   (b) Établir à l'aide d'un développement limite à l'ordre 3, l'équivalence suivante

$$\frac{1}{k} + \frac{1}{k-1} + 2\ln\left(1 - \frac{1}{k}\right) \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{3k^3}$$

10. En utilisant les résultats précédents, en déduire l'existence d'une suite convergente $(\varepsilon''_n)_{n\geqslant 1}$ de limite nulle, vérifiant, pour tout entier naturel n non-nul

$$H_n = \ln(n) + \gamma + \frac{1}{2n} - \frac{1}{12n^2} + \frac{\varepsilon''_n}{n^2}$$

Problème 2 Matrices de trace nulle

On considère E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension n avec $n \geqslant 2$.

On note $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des matrices carrées de taille n à coefficients réels.

Pour un vecteur x non-nul de $\mathbb{R}^n$ on notera $\mathrm{Vect}(x)$ le sous-espace vectoriel engendré par x.

Pour $A = (a_{i,j})_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ on nomme Trace de A le scalaire $\mathrm{Tr}(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{i,i}$

Partie I — Un exemple

Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$.

1. Que vaut $\mathrm{Tr}(A)$?
2. Soit $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$. Montrer que P est inversible et déterminer P^{-1}
3. Calculer $N = PAP^{-1}$
4. Soit $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ et $\Psi : M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \mapsto DM - MD$
   (a) Montrer que Ψ est un endomorphisme de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$
   (b) Déterminer $\mathrm{Ker}(\Psi)$ et $\mathrm{Im}(\Psi)$
   (c) Déterminer une matrice M telle que $DM - MD = N$
5. En déduire qu'il existe deux matrices B et C telle que $A = BC - CB$.
6. Déterminer explicitement B et C

Partie II — Généralisation

7. (a) Montrer que, si B et C sont deux éléments de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on a $\mathrm{Tr}(BC) = \mathrm{Tr}(CB)$
   (b) Que vaut alors $\mathrm{Tr}(BC - CB)$?
   (c) Montrer que deux matrices semblables ont la même trace.
   (d) En déduire que, si u est un endomorphisme de E et $\mathcal{B}_1$ et $\mathcal{B}_2$ sont deux bases de E, alors $\mathrm{Tr}(\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_1}(u)) = \mathrm{Tr}(\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_2}(u))$

   Par la suite, pour u un endomorphisme de E, on note $\mathrm{Tr}(u)$ le réel $\mathrm{Tr}(\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u))$ qui est indépendant du choix de la base $\mathcal{B}$.
8. Soit u un endomorphisme de E tel que, pour tout $x \in E$, la famille $(x, u(x))$ est liée. Soit $\mathcal{B} = (e_1, \cdots, e_n)$ une base de E
   (a) Montrer qu'il existe des réels $(\lambda_1, \cdots, \lambda_n)$ tels que, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$ $u(e_i) = \lambda_i e_i$
   (b) Soit $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$ tel que $i \neq j$. Montrer que $\lambda_i = \lambda_j$ (*On pourra considérer* $u(e_i + e_j)$)
   (c) En déduire qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $u = \lambda \mathrm{Id}_E$

   Dans toute la suite du problème u désignera un endomorphisme non-nul de E de trace nulle.
9. (a) Justifier qu'il existe un vecteur x_0 de E tel que la famille $(x_0, u(x_0))$ soit libre.
   (b) Montrer qu'il existe alors un supplémentaire F de $\mathrm{Vect}(x_0)$ tel que $u(x_0) \in F$

   On désigne par p la projection sur F parallèlement à $\mathrm{Vect}(x_0)$.
10. (a) Montrer que F est stable par l'endomorphisme $p \circ u$
    (b) Montrer que la restriction de $p \circ u$ à F est un endomorphisme de F de trace nulle.
11. Montrer qu'il existe une base E dans laquelle la matrice de u a tous ses coefficients diagonaux nuls (*On pourra procéder par récurrence sur* n)
12. Soit D une matrice diagonale de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $D = \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \alpha_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \alpha_n \end{pmatrix}$ telle que, pour $i \neq j$, $\alpha_i \neq \alpha_j$
    (a) Montrer que l'application $\varphi : M \mapsto DM - MD$ est un endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$
    (b) Déterminer $\mathrm{Ker}(\varphi)$ et $\dim(\mathrm{Ker}(\varphi))$
13. (a) Soit G un supplémentaire de $\mathrm{Ker}(\varphi)$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que la restriction de φ à G est une bijection de G vers $\mathrm{Im}(\varphi)$
    (b) Que vaut $\dim(\mathrm{Im}(\varphi))$?
    (c) En déduire que $\mathrm{Im}(\varphi)$ est l'ensemble des matrices dont les coefficients diagonaux sont nuls.
14. Montrer que si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est une matrice de trace nulle alors il existe deux matrices B et C de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $A = BC - CB$.

Corrigé

Corrigé du problème 1

Partie I

1. Soit $k \in \mathbb{N}^*$, on a

$$\forall t \in [k, k+1], \qquad \frac{1}{k+1} \leqslant \frac{1}{t} \leqslant \frac{1}{k}$$

D'où, en intégrant

$$\int_k^{k+1} \frac{1}{k+1}\,\mathrm{d}t \leqslant \int_k^{k+1} \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t \leqslant \int_k^{k+1} \frac{1}{k}\,\mathrm{d}t$$

C'est-à-dire

$$\boxed{\forall k \in \mathbb{N}^*, \qquad \frac{1}{k+1} \leqslant \ln(k+1) - \ln(k) \leqslant \frac{1}{k}}$$

2. (a) On reconnait en $(H_n)_{n\in\mathbb{N}}$ les sommes partielles de la série harmonique, une série de Riemann divergente, on a alors

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} H_n = +\infty}$$

(b) Soit $n \in \mathbb{N}$, en sommant l'encadrement de la question 1., on obtient

$$\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k+1} \leqslant \sum_{k=1}^{n-1} \ln(k+1) - \ln(k) \leqslant \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k}$$

D'où

$$\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k} \leqslant \ln(n) - \ln(1) \leqslant \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k}$$

C'est-à-dire

$$H_n - 1 \leqslant \ln(n) \leqslant H_n - \frac{1}{n}$$

On en déduit que $\ln(n) + \dfrac{1}{n} \leqslant H_n$ et $H_n \leqslant \ln(n) + 1$ et donc

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad \ln(n) + \frac{1}{n} \leqslant H_n \leqslant \ln(n) + 1}$$

(c) De l'inégalité précédente on déduit

$$\forall n \geqslant 2, \qquad 1 + \frac{1}{n\ln(n)} \leqslant \frac{H_n}{\ln(n)} \leqslant 1 + \frac{1}{\ln(n)}$$

D'après le théorème des gendarmes on a alors $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{H_n}{\ln(n)} = 1$, c'est-à-dire

$$\boxed{H_n \underset{+\infty}{\sim} \ln(n)}$$

3. (a) Soit $n \in \mathbb{N}$, on a, d'après la question 1., $\dfrac{1}{n+1} \leqslant \ln(n+1) - \ln(n)$

$$u_{n+1} - u_n = H_{n+1} - \ln(n+1) - H_n + \ln(n) = \frac{1}{n+1} - \ln(n+1) + \ln(n) \leqslant 0$$

Ainsi $\boxed{\text{la suite } (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est bien décroissante.}}$

(b) On sait d'après la question 2.(*b*) que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad H_n - \ln(n) \geqslant \frac{1}{n} \geqslant 0$$

Ainsi la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et minorée par 0, elle converge donc vers un réel $\gamma \geqslant 0$.

Comme la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante on a de plus

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad u_n \leqslant u_1$$

C'est-à-dire

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad u_n \leqslant 1$$

On en déduit que $\gamma = \lim\limits_{n\to+\infty} u_n \leqslant 1$

Finalement $\boxed{\text{la suite } (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ converge vers un réel } \gamma \in [0,1].}$

4. Soit f une fonction définie et deux fois dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ dont les dérivées première et seconde sont notées respectivement f' et f''. On suppose que f'' est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.

On pose, pour tout entier naturel k non-nul

$$J_k = \frac{1}{2}\int_k^{k+1} \left(t - k - \frac{1}{2}\right)^2 f''(t)\,\mathrm{d}t$$

(a) Soit $k \in \mathbb{N}^*$, on va procéder à deux intégrations par parties successives, on a alors

$$\begin{aligned}
J_k &= \frac{1}{2}\int_k^{k+1} \left(t - k - \frac{1}{2}\right)^2 f''(t)\,\mathrm{d}t \\
&= \left[\frac{1}{2}\left(t - k - \frac{1}{2}\right)^2 f'(t)\right]_k^{k+1} - \int_k^{k+1} \frac{1}{2}2\left(t - k - \frac{1}{2}\right) f'(t)\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{f'(k+1)}{8} - \frac{f'(k)}{8} - \left(\left[\left(t - k - \frac{1}{2}\right) f(t)\right]_k^{k+1} - \int_k^{k+1} f(t)\,\mathrm{d}t\right) \\
&= \frac{f'(k+1) - f'(k)}{8} - \left(\frac{f(k+1)}{2} + \frac{f(k)}{2} - \int_k^{k+1} f(t)\,\mathrm{d}t\right) \\
&= \frac{f'(k+1) - f'(k)}{8} - \frac{f'(k+1) + f(k)}{2} + \int_k^{k+1} f(t)\,\mathrm{d}t
\end{aligned}$$

Ainsi

$$\boxed{\forall k \in \mathbb{N}^*, \qquad J_k = \frac{f'(k+1) - f'(k)}{8} - \frac{f(k+1) + f(k)}{2} + \int_k^{k+1} f(t)\,\mathrm{d}t}$$

(b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$, en sommant la relation précédente on a

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n-1} J_k &= \sum_{k=1}^{n-1} \frac{f'(k+1) - f'(k)}{8} - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{f(k+1)}{2} + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{f(k)}{2} + \sum_{k=1}^{n-1} \int_k^{k+1} f(t)\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{f'(n) - f'(1)}{8} - \sum_{k=2}^{n} \frac{f(k)}{2} - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{f(k)}{2} + \int_1^n f(t)\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{f'(n) - f'(1)}{8} - \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} f(k) + \frac{f(1)}{2} - \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} f(k) + \frac{f(n)}{2} + \int_1^n f(t)\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{f'(n) - f'(1)}{8} - \sum_{k=1}^{n} f(k) + \frac{f(1) + f(n)}{2} + \int_1^n f(t)\,\mathrm{d}t
\end{aligned}$$

On a donc

$$\sum_{k=1}^{n-1} J_k = \frac{f(1) + f(n)}{2} + \frac{f'(n) - f'(1)}{8} + \int_1^n f(t)\,\mathrm{d}t - \sum_{k=1}^{n} f(k)$$

D'où

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad \sum_{k=1}^{n} f(k) = \frac{f(1)+f(n)}{2} + \frac{f'(n)-f'(1)}{8} + \int_1^n f(t)\,\mathrm{d}t - \sum_{k=1}^{n-1} J_k}$$

5. On suppose dans cette question que la fonction f est définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $f(x) = \dfrac{1}{x}$

(a) Pour $t \in [k, k+1]$ on a $-\dfrac{1}{2} \leqslant t - k - \dfrac{1}{2} \leqslant \dfrac{1}{2}$, d'où

$$\forall t \in\in [k, k+1], \qquad 0 \leqslant \left(t - k - \frac{1}{2}\right)^2 \leqslant \frac{1}{4}$$

Ainsi

$$\forall t \in\in [k, k+1], \qquad 0 \leqslant \left(t - k - \frac{1}{2}\right)^2 \frac{2}{t^3} \leqslant \frac{1}{2t^3}$$

On en déduit que

$$0 \leqslant \frac{1}{2}\int_k^{k+1} \left(t - k - \frac{1}{2}\right)^2 \frac{2}{t^3}\,\mathrm{d}t \leqslant \frac{1}{2}\int_k^{k+1} \frac{1}{2t^3}\,\mathrm{d}t$$

C'est-à-dire

$$\boxed{\forall k \in \mathbb{N}^*, \qquad 0 \leqslant J_k \leqslant \int_k^{k+1} \frac{1}{4t^3}\,\mathrm{d}t}$$

(b) D'après la question précédente on a

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \qquad 0 \leqslant J_k \leqslant \frac{1}{8k^2} - \frac{1}{8(k+1)^2}$$

La série de terme général $\left(\dfrac{1}{8k^2} - \dfrac{1}{8(k+1)^2}\right)_{k\in\mathbb{N}^*}$ est convergente et converge vers $\dfrac{1}{8}$ (les sommes partielles sont télescopiques et se calculent aisément). Ainsi, par théorème de comparaison pour les séries à termes positifs, on en déduit que $\boxed{\text{la série de terme général } (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ converge}}$

(c) Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $N \in \mathbb{N}$, on a alors, en sommant les inégalités obtenues à la question 5.(a)

$$0 \leqslant \sum_{k=n}^{N} J_k \leqslant \sum_{k=n}^{N} \frac{1}{8k^2} - \frac{1}{8(k+1)^2}$$

C'est-à-dire

$$0 \leqslant \sum_{k=n}^{N} J_k \leqslant \frac{1}{8n^2} - \frac{1}{8(N+1)^2}$$

Comme la série de terme général $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge, on en déduit en passant à la limite que

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad 0 \leqslant \sum_{k=n}^{+\infty} J_k \leqslant \frac{1}{8n^2}}$$

(d) Le résultat de la question 4.(b) appliqué à la fonction $t \mapsto \dfrac{1}{t}$ donne

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2n} - \frac{1}{8n^2} + \frac{1}{8} + \ln(n) - \ln(1) - \sum_{k=1}^{n-1} J_k$$

D'où

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad H_n = \ln(n) + \frac{1}{2n} - \frac{1}{8n^2} + \frac{5}{8} - \sum_{k=1}^{+\infty} J_k - \sum_{k=n}^{+\infty} J_k$$

On a alors
$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad u_n = \frac{1}{2n} - \frac{1}{8n^2} + \frac{5}{8} - \sum_{k=1}^{+\infty} J_k - \sum_{k=n}^{+\infty} J_k$$
En faisant tendre n vers $+\infty$ on obtient
$$\gamma = \frac{5}{8} - \sum_{k=1}^{+\infty} J_k$$
Ainsi
$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad H_n = \ln(n) + \gamma + \frac{1}{2n} - \frac{1}{8n^2} - \sum_{k=n}^{+\infty} J_k$$
Notons $\varepsilon_n = -\dfrac{1}{8n} - n\displaystyle\sum_{k=n}^{+\infty} J_k$ de sorte que
$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad H_n = \ln(n) + \gamma + \frac{1}{2n} + \frac{\varepsilon_n}{n}$$
On sait que
$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad 0 \leqslant n\sum_{k=n}^{+\infty} J_k \leqslant \frac{1}{8n}$$
Ainsi
$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad 0 \geqslant \varepsilon \geqslant -\frac{1}{4n}$$
En particulier $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \varepsilon_n = 0$

On a ainsi prouvé l'existence d'une suite convergente $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de limite nulle telle que l'on ait,
$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad H_n = \ln(n) + \gamma + \frac{1}{2n} + \frac{\varepsilon_n}{n}}$$

Partie II

6. (a) Soit $\varepsilon > 0$, on sait que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n} = 1$, ainsi $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n - b_n}{b_n} = 0$.

Soit alors n_0 tel que
$$\forall n \geqslant n_0, \qquad \left|\frac{a_n - b_n}{b_n}\right| \leqslant \varepsilon$$
L'existence d'un tel entier n_0 découle de la définition de la limite.

On a ainsi, puisque la suite $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ prend des valeurs strictement positives
$$\boxed{\forall n \geqslant n_0, \qquad |a_n - b_n| \leqslant \varepsilon b_n}$$

(b) La série de terme général $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente, on sait de plus que $a_n \underset{+\infty}{\sim} b_n$ et que les suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont à termes positifs. Ainsi la série de terme général $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et par suite, la série de terme général $(|a_n - b_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ converge également car son terme général est positif et majoré à partir d'un certain rang par le terme général d'une série convergente.

Remarque

La vraie « difficulté »de cette question est de bien prouver la convergence de toutes les séries que l'on manipule

On sait que, pour tout $n \geqslant n_0$, $|a_n - b_n| \leqslant \varepsilon b_n$.

Ainsi, pour $n \geqslant n_0$ on a
$$\left|\sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k - b_k\right| \leqslant \sum_{k=n+1}^{+\infty} |a_k - b_k| \leqslant \sum_{k=n+1}^{+\infty} \varepsilon b_k$$

D'où

$$\boxed{\forall n \geqslant n_0, \qquad \left|\sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k - \sum_{k=n+1}^{+\infty} b_k\right| \leqslant\leqslant \sum_{k=n+1}^{+\infty} \varepsilon b_k}$$

(c) Pour plus de simplicité notons

$$A_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k, \qquad \text{et } B_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} b_k$$

Les résultats précédents s'écrivent alors

$$\forall n \geqslant n_0, \qquad |A_n - B_n| \leqslant \varepsilon B_n$$

Comme la suite $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est à termes strictement positifs on a alors

$$\forall n \in \mathbb{N}, B_n > 0$$

D'où

$$\forall n \geqslant n_0, \qquad \left|\frac{A_n - B_n}{B_n}\right| \leqslant \varepsilon$$

Les questions précédentes nous ont donc permis de prouver que

$$\forall \varepsilon, \quad \exists n_0 \in \mathbb{N}, \quad \forall n \geqslant n_0, \qquad \left|\frac{A_n - B_n}{B_n}\right| \leqslant \varepsilon$$

C'est-à-dire

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{A_n - B_n}{B_n} = 0$$

Où encore

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{A_n}{B_n} - 1 = 0$$

Ainsi

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{A_n}{B_n} = 1$$

C'est-à-dire $A_n \underset{+\infty}{\sim} B_n$, en reprenant les notations de l'énoncé on a donc

$$\sum_{k=n}^{+\infty} a_k \underset{+\infty}{\sim} \sum_{k=n}^{+\infty} b_k$$

7. Soit $\alpha > 1$

(a) Soit $k \geqslant 2$, on a

$$\forall t \in [k, k+1], \frac{1}{t^\alpha} \leqslant \frac{1}{k^\alpha}$$
$$\forall t \in [k-1, k], \frac{1}{k^\alpha} \leqslant \frac{1}{t^\alpha}$$

D'où, en intégrant

$$\int_k^{k+1} \frac{1}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t \leqslant \int_k^{k+1} \frac{1}{k^\alpha}\,\mathrm{d}t$$
$$\int_{k-1}^{k} \frac{1}{k^\alpha}\,\mathrm{d}t \leqslant \int_{k-1}^{k} \frac{1}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t$$

C'est-à-dire

$$\int_k^{k+1} \frac{1}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t \leqslant \frac{1}{k^\alpha}$$
$$\frac{1}{k^\alpha} \leqslant \int_{k-1}^{k} \frac{1}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t$$

Finalement

$$\boxed{\forall k \geqslant 2, \qquad \int_k^{k+1} \frac{1}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t \leqslant \frac{1}{k^\alpha} \leqslant \int_{k-1}^{k} \frac{1}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t}$$

(b) Soit $n \in \mathbb{N}$ et $\mathbb{N} > n$, en sommant les inégalités précédentes on obtient

$$\sum_{k=n+1}^{N} \int_k^{k+1} \frac{1}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t \leqslant \sum_{k=n+1}^{N} \frac{1}{k^\alpha} \leqslant \sum_{k=n+1}^{N} \int_{k-1}^{k} \frac{1}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t$$

C'est-à-dire

$$\boxed{\int_{n+1}^{N+1} \frac{1}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t \leqslant \sum_{k=n+1}^{N} \frac{1}{k^\alpha} \leqslant \int_{n}^{N} \frac{1}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t}$$

(c) Soit $n \in \mathbb{N}$ et $N > n$, le résultat précédent peut se réécrire

$$\left[\frac{1}{1-\alpha}\frac{1}{t^{\alpha-1}}\right]_{n+1}^{N+1} \leqslant \sum_{k=n+1}^{N} \frac{1}{k^\alpha} \leqslant \left[\frac{1}{1-\alpha}\frac{1}{t^{\alpha-1}}\right]_{n}^{N}$$

Comme $\alpha > 1$ on sait que la série $\sum \frac{1}{k^\alpha}$ est une série de Riemann convergente, ainsi $\lim\limits_{N\to+\infty} \sum\limits_{k=n+1}^{N} \frac{1}{k^\alpha}$ existe. En passant à la limite on a alors

$$-\frac{1}{1-\alpha}\frac{1}{(n+1)^{\alpha-1}} \leqslant \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha} \leqslant -\frac{1}{1-\alpha}\frac{1}{n^{\alpha-1}}$$

D'où

$$\frac{n^{\alpha-1}}{(n+1)^{\alpha-1}} \leqslant \frac{\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha}}{\frac{1}{\alpha-1}\frac{1}{n^{\alpha-1}}} \leqslant 1$$

On a $\dfrac{n^{\alpha-1}}{(n+1)^{\alpha-1}} = \dfrac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{\alpha-1}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$, ainsi, d'après le théorème des gendarmes,

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha}}{\frac{1}{\alpha-1}\frac{1}{n^{\alpha-1}}} = 1$$

C'est-à-dire

$$\boxed{\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha} \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{\alpha-1} \times \frac{1}{n^{\alpha-1}}}$$

Partie III

On considère les suites $(x_n)_{n\geqslant 1}$ et $(y_n)_{n\geqslant 2}$ définies par

$$\forall n \geqslant 1, \quad x_n = u_n - \frac{1}{2n}, \qquad \text{et} \qquad \forall n \geqslant 2, \quad y_n = x_n - x_{n-1}$$

8. (a) D'après la question 5.(d) de la partie 1 on a

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad H_n = \ln(n) + \gamma + \frac{1}{2n} + \frac{\varepsilon_n}{n}$$

D'où

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad x_n = \gamma + \frac{\varepsilon_n}{n}$$

On en déduit que

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} x_n = \gamma}$$

(b) Soit $n \in \mathbb{N}$ et $N \geqslant n$, on a alors par télescopage

$$\sum_{k=n+1}^{N} y_k = x_N - x_n$$

Ainsi, comme $\lim_{N\to+\infty} x_N = \gamma$ on en déduit que la série de terme général $(y_k)_{k\geqslant n}$ converge et que

$$\boxed{\gamma - x_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} y_k}$$

(c) Soit $k \geqslant 2$, on a

$$\begin{aligned}
y_k &= x_k - x_{k-1} \\
&= H_k - H_{k-1} + \ln(k-1) - \ln(k) + \frac{1}{2k-2} - \frac{1}{2k} \\
&= \frac{1}{k} + \ln\left(1 - \frac{1}{k}\right) + \frac{1}{2}\frac{1}{k-1} - \frac{1}{2}\frac{1}{k} \\
&= \ln\left(1 - \frac{1}{k}\right) + \frac{1}{2}\frac{1}{k-1} + \frac{1}{2}\frac{1}{k} \\
&= \frac{1}{2}\left(\ln\left(1 - \frac{1}{k}\right) + \frac{1}{k} + \frac{1}{k-1}\right)
\end{aligned}$$

Ainsi

$$\boxed{\gamma - x_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} y_k = \frac{1}{2}\sum_{k=n+1}^{+\infty}\left(\frac{1}{k} + \frac{1}{k-1} + 2\ln\left(1 - \frac{1}{k}\right)\right)}$$

9. (a) On peut simplement étudier la différence $\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k} + \frac{1}{k^2} + \frac{1}{k^3}$ mais on peut également obtenir le résultat par un calcul de développement limité

$$\begin{aligned}
\frac{1}{k-1} &= \frac{1}{k}\frac{1}{1-\frac{1}{k}} \\
&\underset{k\to+\infty}{=} \frac{1}{k}\left(1 + \frac{1}{k} + \frac{1}{k^2} + o\left(\frac{1}{k^2}\right)\right) \\
&\underset{k\to+\infty}{=} \frac{1}{k} + \frac{1}{k^2} + \frac{1}{k^3} + o\left(\frac{1}{k^3}\right)
\end{aligned}$$

Ainsi

$$\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k} + \frac{1}{k^2} + \frac{1}{k^3} \underset{k\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{k^3}\right)$$

Il existe donc une suite $(\varepsilon'_k)_{k\in\mathbb{N}*}$ telle que $\lim_{k\to+\infty} \varepsilon'_k = 0$ et

$$\boxed{\forall k \in \mathbb{N}^*, \qquad \frac{1}{k} + \frac{1}{k^2} + \frac{1}{k^3} + \frac{\varepsilon'_k}{k^3}}$$

(b) Pour $k \neq 0$ on a

$$\begin{aligned}
\frac{1}{k} + \frac{1}{k-1} + 2\ln\left(1 - \frac{1}{k}\right) &\underset{k\to+\infty}{=} \frac{1}{k} + \frac{1}{k} + \frac{1}{k^2} + \frac{1}{k^3} + o\left(\frac{1}{k^3}\right) + 2\left(-\frac{1}{k} - \frac{1}{2k^2} - \frac{1}{3k^3} + +o\left(\frac{1}{k^3}\right)\right) \\
&\underset{k\to+\infty}{=} \frac{2}{k} + \frac{1}{k^2} + \frac{1}{k^3} - \frac{2}{k} - \frac{1}{k^2} - \frac{2}{3k^3} + o\left(\frac{1}{k^3}\right) \\
&\underset{k\to+\infty}{=} \frac{1}{3k^3} + o\left(\frac{1}{k^3}\right)
\end{aligned}$$

Ainsi

$$\boxed{\frac{1}{k} + \frac{1}{k-1} + 2\ln\left(1 - \frac{1}{k}\right) \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{3k^3}}$$

10. On a montré que
$$\gamma - x_n = \frac{1}{2}\sum_{k=n+1}^{+\infty}\left(\frac{1}{k}+\frac{1}{k-1}+2\ln\left(1-\frac{1}{k}\right)\right)$$

Pour $k \geqslant 2$ on a
$$\begin{aligned}\frac{1}{k}+\frac{1}{k-1}+2\ln\left(1-\frac{1}{k}\right) &= \frac{1}{k}+\frac{1}{k-1}+2\left(\ln(k-1)-\ln(k)\right)\\ &\geqslant \frac{1}{k}+\frac{1}{k-1}-\frac{2}{k}\\ &\geqslant \frac{1}{k-1}-\frac{1}{k}\\ &\geqslant \frac{1}{k(k-1)}\\ &\geqslant 0\end{aligned}$$

On sait donc que les suites $\left(\frac{1}{k}+\frac{1}{k-1}+2\ln\left(1-\frac{1}{k}\right)\right)_{k\geqslant 2}$ et $\left(\frac{1}{3k^2}\right)_{k\geqslant 2}$ dont à valeurs strictement positives, que la série de terme général $\left(\frac{1}{3k^2}\right)_{k\geqslant 2}$ converge et que
$$\frac{1}{k}+\frac{1}{k-1}+2\ln\left(1-\frac{1}{k}\right) \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{3k^3}$$

Le résultat de la question 1.(c) de la partie II nous assure alors que
$$\gamma - x_n = \frac{1}{2}\sum_{k=n+1}^{+\infty}\left(\frac{1}{k}+\frac{1}{k-1}+2\ln\left(1-\frac{1}{k}\right)\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2}\sum_{k=n+1}^{+\infty}\frac{1}{3k^2}$$

De plus, d'après la question 2.(c) de la partie II on a
$$\frac{1}{2}\sum_{k=n+1}^{+\infty}\frac{1}{3k^3} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{6}\frac{1}{3-1}\frac{1}{n^{3-1}} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{12}\frac{1}{n^2}$$

Par transitivité de la relation d'équivalence on a alors
$$\gamma - x_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{12}\frac{1}{n^2}$$

D'où
$$\gamma - x_n - \frac{1}{12}\frac{1}{n^2} \underset{n\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

Il existe donc une suite $(\varepsilon''_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge vers 0 et telle que
$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad \gamma - x_n - \frac{1}{12}\frac{1}{n^2} = \frac{\varepsilon''_n}{n^2}$$

D'où
$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \qquad H_n = \ln(n) + \gamma + \frac{1}{2n} - \frac{1}{12n^2} + \frac{\varepsilon''_n}{n^2}}$$

Corrigé du problème 2

Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$.

1. $\boxed{\mathrm{Tr}(A) = 2 - 2 = 0}$

2. P est triangulaire supérieure à coefficients diagonaux non-nuls donc $\boxed{P \text{ est inversible}}$.

   On a de plus $\det(P) = 1$, d'où $\boxed{P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}}$

Inverse d'une matrice $2x2$

On sait que, si $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ est inversible alors $M^{-1} = \dfrac{1}{\det(M)} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$

3. Après calcul on obtient

$$\boxed{N = PAP^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 7 & 0 \end{pmatrix}}$$

4. (a) Soit $(M_1, M_2) \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.

   On a alors

$$\begin{aligned} \Psi(M_1 + \lambda M_2) &= D(M_1 + \lambda M_2) - (M_1 + \lambda M_2)D \\ &= DM_1 - M_1 D + \lambda(DM_2 - M_2 D) \\ &= \Psi(M_1) + \lambda \Psi(M_2) \end{aligned}$$

   Ainsi Ψ est linéaire. De plus, si $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ alors $\Psi(M) \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

   Donc $\boxed{\Psi \text{ est un endomorphisme de } \mathcal{M}_2(\mathbb{R}).}$

   (b) Soit $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ avec $(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$.

   On a alors

$$\Psi(M) = \begin{pmatrix} a & b \\ 2c & 2d \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a & 2b \\ c & 2d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -b \\ c & 0 \end{pmatrix}$$

   On en déduit que

$$\boxed{\mathrm{Ker}(\Psi) = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix} \ , \ (a, d) \in \mathbb{R}^2 \right\}}$$

   En d'autres termes $\boxed{\mathrm{Ker}(\Psi) \text{ est l'ensemble des matrices diagonales de taille 2.}}$

   Et

$$\boxed{\mathrm{Im}(\Psi) = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & b \\ c & 0 \end{pmatrix} \ , \ (b, c) \in \mathbb{R}^2 \right\}}$$

   En d'autres termes $\boxed{\mathrm{Im}(\Psi) \text{ est l'ensemble des matrices de taille 2 de diagonale nulle.}}$

   (c) À l'aide du calcul précédent de $\Psi(M)$ on voit que l'on peut par exemple prendre $\boxed{M = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 7 & 0 \end{pmatrix}}$

5. On a $DM - MD = N = PA.P^{-1}$.

   D'où $P^{-1}DMP - P^{-1}MDP = A$

   Ou encore $P^{-1}DPP^{-1}MP - P^{-1}MPP^{-1}DP = A$

   Ainsi, en prenant $\boxed{B = P^{-1}DP \text{ et } C = P^{-1}MP}$ on a bien $A = BC - CB$.

6. Il n'y a plus qu'à faire le calcul :

$$\boxed{B = P^{-1}DP = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad C = P^{-1}MP = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 11 & 2 \end{pmatrix}}$$

Partie II — Généralisation

7. (a) Soit B et C deux éléments de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

   Alors

$$\begin{aligned} \mathrm{Tr}(BC) &= \sum_{k=1}^{n} (BC)_{k,k} \\ &= \sum_{k=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} B_{k,i} C_{i,k} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} B_{k,i}C_{i,k}\\
&= \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} C_{i,k}B_{k,i}\\
&= \sum_{i=1}^{n}(CB)_{i,i}\\
&= \mathrm{Tr}(CB)
\end{aligned}$$

Ainsi, on a bien $\boxed{\mathrm{Tr}(BC) = \mathrm{Tr}(CB).}$

(b) L'application Trace étant linéaire on en déduit que $\boxed{\mathrm{Tr}(BC - CB) = 0}$.

(c) Soit M et N deux matrices semblables de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Il existe alors $P \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{R})$ telle que $N = PMP^{-1}$.

D'où

$$\mathrm{Tr}(N) = \mathrm{Tr}(\underbrace{P}_{B}\underbrace{MP^{-1}}_{C}) = \mathrm{Tr}(MP^{-1}P) = \mathrm{Tr}(M)$$

Ordre

Attention à l'ordre des matrices, en général $\mathrm{Tr}(ABC) \neq \mathrm{Tr}(ACB)$

Ainsi $\boxed{\text{deux matrices semblables ont la même trace}}$.

(d) Soit u est un endomorphisme de E et $\mathcal{B}_1$ et $\mathcal{B}_2$ deux bases de E, alors, d'après la formule de changement de base, $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_1}(u) = P_{\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_2}\,\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_2}(u)P_{\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_2}^{-1}$.

En particulier $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_1}(u)$ et $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_2}(u)$ sont semblables et donc, d'après la question précédente, $\boxed{\mathrm{Tr}(\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_1}(u)) = \mathrm{Tr}(\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_2}(u))}$.

8. Soit u un endomorphisme de E tel que, pour tout $x \in E$, la famille $(x, u(x))$ est liée.

(a) Soit $i \in [\![1, n]\!]$, la famille $(e_i, u(e_i)$ est liée par hypothèse, il existe donc des réels $(a_i, b_i) \in \mathbb{R}^2$ tels que $a_i e_i + b_i u(e_i) = 0_E$ avec $(a_i, b_i) \neq (0, 0)$.

Or $e_i \neq 0$ (car c'est un élément d'une base) donc $b_i \neq 0$, ainsi $u(e_i) = \dfrac{a_i}{b_i} e_i$.

En notant $\lambda_i = \dfrac{a_i}{b_i}$ on a bien $u(e_i) = \lambda_i e_i$.

Ainsi $\boxed{\text{il existe des réels } (\lambda_1, \cdots, \lambda_n) \text{ tels que, pour tout } i \in [\![1, n]\!]\ u(e_i) = \lambda_i e_i.}$

(b) Soit $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$ tel que $i \neq j$.

Par hypothèse la famille $(e_i+e_j, u(e_i+e_j))$ est liée, l'argument de la question précédente nous montre qu'il existe un réel λ tel que $u(e_i + e_j) = \lambda(e_i + e_j)$.

Or $u(e_i + e_j) = u(e_i) + u(e_j) = \lambda_i e_i + \lambda_j e_j$.

Ainsi $(\lambda - \lambda_i)e_i + (\lambda - \lambda_j)e_j = 0_E$.

La famille (e_i, e_j) est libre (en tant que sous -famille d'une famille libre) d'où $\lambda - \lambda_i = \lambda - \lambda_j = 0$.

En particulier $\boxed{\lambda_i = \lambda_j}$

(c) Notons λ la valeur commune de tous les λ_i.

Alors, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $u(e_i) = \lambda e_i = (\lambda \mathrm{Id}_E)(e_i)$.

Les endomorphismes u et $\lambda\mathrm{Id}_E$ coïncident alors sur la base $\mathcal{B}$. Ainsi $\boxed{u = \lambda \mathrm{Id}_E.}$

Classique

Ce résultat est un exercice assez classique d'oral, il est bon de l'avoir travaillé et compris

9. (a) Supposons par l'absurde qu'il n'existe pas de vecteur x_0 de E tel que la famille $(x_0, u(x_0))$ soit libre.

D'après la question précédente il existe alors λ tel que $u = \lambda\mathrm{Id}_E$.

En particulier $\mathrm{Tr}(u) = n\lambda$. Or $\mathrm{Tr}(u) = 0$, d'où $\lambda = 0$ et donc $u = 0_{\mathcal{L}(E)}$ ce qui est absurde.

Ainsi $\boxed{\text{il existe un vecteur } x_0 \text{ de } E \text{ tel que la famille } (x_0, u(x_0)) \text{ soit libre}}$.

(b) La famille $(x_0, u(x_0))$ est libre, on la complète en une base $(x_0, u(x_0), e_3, \cdots, e_n)$ de E

Notons $F = Vect(u(x_0), e_3, \cdots, e_n)$.

Alors $\boxed{F \text{ est un supplémentaire de } \mathrm{Vect}(x_0) \text{ tel que } u(x_0) \in F}$.

On désigne par p la projection sur F parallèlement à $\mathrm{Vect}(x_0)$.

10. (a) Soit $x \in F$, alors par définition de p on a $p(u(x)) \in F$ i.e. $\boxed{F \text{ est stable par l'endomorphisme } p \circ u}$

(b) Remarquons d'abord que, comme F est stable par l'endomorphisme $p \circ u$ alors la restriction de $p \circ u$ à F est un endomorphisme de F.

La matrice de u dans la base $(x_0, u(x_0), e_3, \cdots, e_n)$ de E est de la forme suivante :

$$M = \left(\begin{array}{c|ccc} 0 & m_{1,2} & \cdots & m_{1,n} \\ \hline 1 & & & \\ 0 & & & \\ \vdots & & A & \\ 0 & & & \end{array}\right)$$

La matrice de $p \circ u$ est alors

$$M = \left(\begin{array}{c|ccc} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \hline 1 & & & \\ 0 & & & \\ \vdots & & A & \\ 0 & & & \end{array}\right)$$

Ainsi A est la matrice dans la base $(u(x_0), e_3, \cdots, e_n)$ de la restriction de $p \circ u$ à F.

Or $0 = \mathrm{Tr}(u) = \mathrm{Tr}(M) = \mathrm{Tr}(A)$.

On en déduit que $\boxed{\text{la restriction de } p \circ u \text{ à } F \text{ est un endomorphisme de } F \text{ de trace nulle.}}$

11. Procédons par récurrence sur $n \geqslant 2$.

<u>Initialisation :</u>

On suppose ici que $n = 2$.

D'après les questions précédentes la matrice de u dans la base $(x_0, u(x_0))$ est la forme $\begin{pmatrix} 0 & b \\ 1 & d \end{pmatrix}$.

Or $\mathrm{Tr}(u) = 0$ d'où $d = 0$. Ainsi, dans la base $(x_0, u(x_0))$ la matrice de u a tous ses coefficients diagonaux nuls.

<u>Hérédité :</u>

Soit $n \geqslant 3$, on suppose que, si v est un endomorphisme d'un espace vectoriel F de dimension $n-1$ de trace nulle alors il existe une base de F dans laquelle sa matrice a tous ses coefficients diagonaux nuls.

Soit maintenant E un espace vectoriel de dimension n et u un endomorphisme de E de trace nulle.

On reprend les arguments vus précédemment. Soit $x_0 \in E$ tel que la famille $(x_0, u(x_0)$ soit libre, F un supplémentaire de $\mathrm{Vect}(x_0)$ contenant $u(x_0)$ et p la projection sur F parallèlement à $\mathrm{Vect}(x_0)$.

Alors la restriction v de $p \circ u$ à F est un endomorphisme de F de trace nulle. Il existe alors une base $(f_2, \cdots f_n)$ de F dans la laquelle la matrice B de $p \circ u$ a tous ses coefficients diagonaux nuls.

La famille $(x_0, f_2, \cdots, f_n)$ est une base de E et, dans cette base, la matrice de u est la forme

$$M = \left(\begin{array}{c|ccc} 0 & m_{1,2} & \cdots & m_{1,n} \\ \hline m_{2,1} & & & \\ \vdots & & & \\ \vdots & & B & \\ m_{n,1} & & & \end{array}\right)$$

En particulier cette matrice a tous ses coefficients diagonaux nuls.

On a donc trouvé une base E dans laquelle la matrice de u a tout ses coefficients diagonaux nuls. Ce qui prouve la propriété au rang n est achève la récurrence.

En conclusion, si u est un endomorphisme de trace nulle d'un espace vectoriel E de dimension $n \geqslant 2$ alors $\boxed{\text{il existe une base } E \text{ dans laquelle la matrice de } u \text{ a tout ses coefficients diagonaux nuls}}$.

12. (a) Soit $(M_1, M_2) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.

    On a alors

$$\begin{aligned}\varphi(M_1 + \lambda M_2) &= D(M_1 + \lambda M_2) - (M_1 + \lambda M_2)D \\ &= DM_1 - M_1 D + \lambda(DM_2 - M_2 D) \\ &= \varphi(M_1) + \lambda\varphi(M_2)\end{aligned}$$

    Ainsi φ est linéaire. De plus, si $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ alors $\varphi(M) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

    Donc $\boxed{\varphi \text{ est un endomorphisme de } \mathcal{M}_n(\mathbb{R}).}$

    (b) Soit $M = (m_{i,j})_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on a alors

$$DM = \begin{pmatrix} \alpha_1 m_{1,1} & \alpha_1 m_{1,2} & \cdots & \alpha_1 m_{1,n} \\ \alpha_2 m_{2,1} & \alpha_2 m_{2,2} & \cdots & \alpha_2 m_{2,n} \\ \vdots & & & \vdots \\ \alpha_n m_{n,1} & \alpha_n m_{n,2} & \cdots & \alpha_n m_{n,n} \end{pmatrix} \text{ et } MD = \begin{pmatrix} \alpha_1 m_{1,1} & \alpha_2 m_{1,2} & \cdots & \alpha_n m_{1,n} \\ \alpha_1 m_{2,1} & \alpha_2 m_{2,2} & \cdots & \alpha_n m_{2,n} \\ \vdots & & & \vdots \\ \alpha_1 m_{n,1} & \alpha_2 m_{n,2} & \cdots & \alpha_n m_{n,n} \end{pmatrix}.$$

    Ainsi

$$DM - MD = \begin{pmatrix} 0 & (\alpha_1 - \alpha_2)m_{1,2} & \cdots & \cdots & (\alpha_1 - \alpha_n)m_{1,n} \\ (\alpha_2 - \alpha_1)m_{2,1} & 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 & (\alpha_{n-1} - \alpha_n)m_{n-1,n} \\ (\alpha_n - \alpha_1)m_{n,1} & \cdots & \cdots & (\alpha_n - \alpha_{n-1})m_{n,n-1} & 0 \end{pmatrix}$$

    Comme les réels $(\alpha_1, \cdots, \alpha_n)$ sont deux-à deux distincts on en déduit que $DM - MD = 0$ si et seulement si M est diagonale.

    Ainsi $\boxed{\mathrm{Ker}(\varphi) \text{ est l'ensemble des matrices diagonales de taille } n}$.

    Notons $(E_{i,j})_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2}$ la base canonique de $\mathcal{M}_(\mathbb{R})$. Alors $\mathrm{Ker}(\varphi) = \mathrm{Vect}(E_{1,1}, E_{2,2}, \cdots, E_{n,n})$.

    En particulier $\boxed{\dim(\mathrm{Ker}(\varphi)) = n}$.

13. (a) Il s'agit exactement de la version géométrique du théorème du rang :

    $\boxed{\text{La restriction de } \varphi \text{ à un supplémentaire } G \text{ de } \mathrm{Ker}(\varphi) \text{ est un isomorphisme de } G \text{ vers } \mathrm{Im}(\varphi).}$

    (b) D'après le théorème du rang appliqué à φ, $\boxed{\dim(\mathrm{Im}(\varphi)) = n^2 - n}$.

    (c) Notons H l'ensemble des matrices dont les coefficients diagonaux sont nuls

    Le calcul fait à la question 12. nous montre que $\mathrm{Im}(\varphi) \subset H$.

    De plus, en notant $(E_{i,j})_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2}$ la base canonique de $\mathcal{M}_(\mathbb{R})$, on a $H = \mathrm{Vect}(\{E_{i,j}\ ,\ (i,j) \in [\![1,n]\!]^2\ ,\ i \neq j\})$.

    Ainsi $\dim(H) = n^2 - n$.

    Par inclusion et égalité des dimensions on en déduit que

    $\boxed{\mathrm{Im}(\varphi) \text{ est l'ensemble des matrices dont les coefficients diagonaux sont nuls}}$.

14. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice de trace nulle.

    D'après la question 11. A est semblable à une matrice N dont tous les coefficients diagonaux sont nuls. Notons $A = P^{-1}NP$ avec P une matrice inversible.

    Or $N \in \mathrm{Im}(\varphi)$, il existe donc une matrice M telle que $N = DM - MD$.

Alors

$$A = P^{-1}NP = P^{-1}(DM - MD)P = P^{-1}DPP^{-1}MP - P^{-1}MPP^{-1}DP$$

En notant $B = P^{-1}DP$ et $C = P^{-1}MP$ on a ainsi montré que :

Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est une matrice de trace nulle alors il existe deux matrices B et C de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $A = BC - CB$.